МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ НА БАЗЕ ВЕДОМСТВЕНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

(УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ)

МОСКВА 2020

2

Всего пронумеровано 24 стр.
Подписано к печати __.04.20
Авт. л. 1,5 Усл. печ. л. 2,2
Заказ № _____.
Тираж 400 экз.

www.v-olymp.ru

Информация о проведении олимпиады

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике проводится более 15 лет. Олимпиада организуется институтом криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России.

С 2008 года Олимпиада ежегодно включается в Перечень Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, что позволяет вузам при поступлении предоставлять льготы ее победителям и призёрам.

Олимпиада проводилась в два этапа. Первый – в дистанционной форме. В этом учебном году участие в нем приняли 2119 школьников, из более чем 60 регионов Российской Федерации.

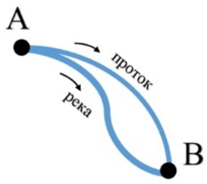
Заключительный этап олимпиады состоялся 09 февраля 2020 года. Возможность очного участия была обеспечена в 10 образовательных организациях ФСБ России в городах: Анапа, Екатеринбург, Калининград, Курган, Москва, Нижний Новгород, Новосибирск, Санкт-Петербург (Пушкин), Ставрополь, Хабаровск. В нем приняли участие 718 человек, из них 178 школьников не выпускных классов, что составляет около 25 % от общего числа.

Перед проведением очного этапа проводились занятия в школах по подготовке к участию в олимпиаде с разбором различных видов олимпиадных заданий.

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1 (9 класс)

Расстояния от пункта А до пункта В по реке и по протоку одинаковы и равны 1 км. Скорость течения в протоке равна V км/ч, а в реке $(2V+1)$ км/ч. Течение и в реке, и в протоке направлено от А к В. Если к разности времен движения катера по протоку из В в А и обратно по протоку прибавить время движения плота по реке из А в В, то получится ровно 1 час. На сколько километров в час скорость катера больше скорости течения в протоке? Значение V не дано. В ответе должно получиться число.



Решение

Пусть $S = AB = 1$ км, U км/ч – собственная скорость катера, $V_1 = 2V + 1$ км/ч – скорость течения в реке, $T = 1$ ч – данное в задаче время. По условию:

$$\frac{S}{U-V} - \frac{S}{U+V} + \frac{S}{V_1} = T.$$

Пусть $x = U - V$ – искомая разность. Тогда:

$$\frac{S}{x} - \frac{S}{x+2V} + \frac{S}{V_1} = T.$$

Преобразовав, получим относительно x уравнение:

$$(S - TV_1)x^2 + 2V(S - TV_1)x + 2SV_1V = 0.$$

Заметим, что $S - TV_1 = -2SV \neq 0$. Значит, уравнение можно на эту величину поделить: $x^2 + 2Vx - 2V - 1 = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -2V - 1$. Корень x_2 отрицателен, поэтому $U - V = x_1 = 1$.

Ответ: 1 км/ч.

Задача 2 (9, 10, 11 классы)

Восемь чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1 \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0 \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0 \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1. \end{cases}$$

Известно, что $a_2b_3 = 7$. Найдите a_4b_4.

Решение

Докажем, что $a_2b_3 = a_3b_2$. (1)

Умножим уравнение (а) исходной системы

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1 & (\text{а}) \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0 & (\text{б}) \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0 & (\text{в}) \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1 & (\text{г}) \end{cases}$$

на b_2 и вычтем из него уравнение (б), умноженное на b_1.
В результате получим

$$a_2 \cdot \Delta = b_2. \qquad (2)$$

Здесь $\Delta = \mathrm{b}_2b_3 - b_1b_4$. Аналогично, из (в) и (г) находим, что

$$a_3 \cdot \Delta = b_3. \qquad (3)$$

Заметим, что $\Delta \neq 0$, так как в противном случае из (3) следовало бы, что $b_3 = 0$, а значит и $a_2b_3 = 0$, что противоречит условию задачи. Остается выразить a_2 и a_3 из (2) и (3) и подставить полученные выражения в (1). Справедливость соотношения (1) будет тем самым доказана. Далее из уравнения (г) и равенства (1), следует, что $a_4b_4 = 1 - a_3b_2 = 1 - a_2b_3 = -6$.

Ответ: $a_4b_4 = -6$

Комментарий

Система уравнений в задаче – это покомпонентная запись матричного равенства:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\text{ где } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что если произведение двух матриц равно единичной, то такие матрицы коммутируют, а значит система уравнений в задаче останется справедливой, если в ней все a_i заменить на b_i и наоборот. Из этого наблюдения равенство (1) следует немедленно.

Задача 3 (9, 10, 11 классы)

Решите уравнение $2^x+2^y=6^t$ в целых числах.

Решение

Пусть сначала $x=y$. Исходное уравнение в этом случае примет вид:

$$2^{x+1}=6^t. \qquad (1)$$

Если $t>0$, то правая часть (1) кратна трем, а левая –нет. Значит, $t\le 0$. Если же предположить, что $t<0$, то, переписав (1) в виде $2^{-x-1}=6^{-t}$, вновь придем к противоречию: кратное трем число 6^{-t} не может быть никакой степенью двойки. Поэтому $t=0$ и $x=y=-1$.

Пусть теперь числа x и y различны. Можно считать, что $x<y$. Положим:

$$y=x+n, n\in\mathbb{N}. \qquad (2)$$

Исходное уравнение запишется в виде

$$2^x\cdot(1+2^n)=6^t. \qquad (3)$$

Заметим, что $t\ge 0$. Действительно, из (3) следует, что $3^{-t}\cdot(1+2^n)=2^{t-x}$. Если $t<0$, то левая часть последнего равенства делится на 3, а правая – нет. Значит, $t\ge 0$. Но тогда и $x\ge 0$ (иначе, согласно (3), дробное число равнялось бы целому). Число 2 входит в канонические разложения на простые множители левой и правой частей (3) в одной и той же степени, поэтому

$$x=t. \qquad (4)$$

Сократив обе части (3) на 2^x и перенеся 1 в другую часть, получим

$$2^n = 3^t - 1. \qquad (5)$$

Решим уравнение (5), предполагая n натуральным, а t – неотрицательным целым.

- Пусть $n = 1$. Тогда $t = 1$. С учетом (2) и (4) находим решение исходного уравнения: $x = 1, y = 2, t = 1$;
- Пусть $n > 1$. Тогда левая часть (5) кратна 4. Если t нечетно, то правая часть (5) на 4 не делится. Значит, $t = 2m, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$. Из (5) следует, что $2^n = (3^m - 1)(3^m + 1)$.

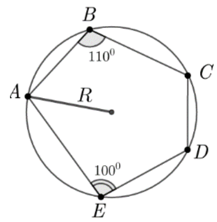
Значит, числа $3^m - 1$ и $3^m + 1$ являются степенями двойки. Заметим также, что на числовой оси эти числа находятся друг от друга на расстоянии 2. Такое возможно, только если $3^m - 1 = 2$ и $3^m + 1 = 4$. Отсюда $m = 1$ и тогда $t = 2, n = 3$. Подставляя найденные значения в (2) и (4), получаем решение $x = 2, y = 5, t = 2$.

Ответ: $(-1, -1, 0), (1, 2, 1), (2, 5, 2)$ (при условии $x \leq y$).

Задача 4 (9 класс)

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность радиуса R. Известно, что $\angle B = 110^0, \angle E = 100^0$.

Найдите сторону CD.



Решение

Градусные меры дуг $\overset{\frown}{AD}$ и $\overset{\frown}{CA}$ равны соответственно $2 \cdot (180^0 - \angle E)$ и $2 \cdot (180^0 - \angle B)$.
Сумма градусных мер дуг $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{CA}$ и $\overset{\frown}{DC}$ равна 360^0. Значит, величина угла CAD (равная половине градусной меры дуги $\overset{\frown}{DC}$) определяется равенством[1]:

$$\angle CAD = \angle B + \angle E - 180^0 = 30^0.$$

По формуле для радиуса описанной около треугольника CAD окружности находим[2]:

$$R = \frac{CD}{2 \cdot \sin\angle CAD} = CD.$$

Ответ: $CD = R$.

Комментарии

- [1]Отсюда следует, что сумма любых двух несмежных углов вписанного пятиугольника больше 180^0.
- [2]Имеют место аналогичные формулы:

$$-2R = \frac{CD}{\sin(\angle B + \angle E)} = \cdots = \frac{BC}{\sin(\angle A + \angle D)}.$$

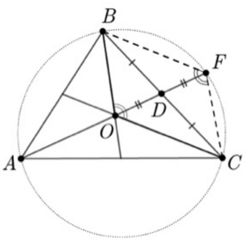
Оказывается, эти равенства выражают необходимое и достаточное условие того, что около данного пятиугольника можно описать окружность радиуса R.

Задача 5 (9 класс)

Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите длину медианы, проведенной из вершины A, если $\angle BAC = 35^0$, $\angle BOC = 145^0$, $BC = a$.

Решение

Обозначим длину искомой медианы AD за m. На прямой AD вне треугольника отметим такую точку F, что $OD = DF = m/3$.



Четырехугольник $OBFC$ – параллелограмм, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам (по условию $BD = DC$, и $OD = DF$ по построению). В параллелограмме противоположные углы равны, следовательно:

$$< CFB =< BOC \qquad (1)$$

В четырехугольнике $ABFC$, по условию, а также в силу равенства (1), сумма противоположных углов BAC и CFB равна 180^0. Значит, вокруг четырехугольника $ABFC$ можно описать окружность. Известно, что если две хорды окружности, BC и AF, пересекаются в точке D, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды, то есть $BD \cdot DC = AD \cdot DF \Leftrightarrow (a/2)^2 = m \cdot m/3$. Отсюда $m = a\sqrt{3}/2$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Задача 6 (9, 10 классы)

Найдите площадь треугольника ABC, вершины которого имеют координаты $A(0,0)$, $B(1424233, 2848467)$, $C(1424234, 2848469)$. Ответ округлите до сотых.

Решение

Заметим, что точки B и C лежат на прямой $y = 2x + 1$. Их абсциссы отличаются на 1, следовательно $BC = \sqrt{5}$. Длина высоты треугольника ABC, проведенной из вершины A, равна расстоянию h от точки A до прямой $y = 2x + 1$, которое, в свою очередь, равно $1/\sqrt{5}$. Искомая площадь

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,50.

Задача 7 (9, 10, 11 классы)

Рассмотрим всевозможные 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры 1,2. Сколько среди них делятся на 3 нацело?

Решение

Каждое 100-значное натуральное число может быть получено дописыванием двух цифр справа к 98-значному числу. Пусть x – некоторое 98-значное число. Посмотрим какие справа две цифры (каждая из которых равна 1 или 2) нужно к числу x приписать, чтобы получившееся 100-значное число делилось на 3. Воспользуемся тем, что остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления на 3 суммы его цифр. Пусть наше число x при делении на 3 дает остаток m. Тогда,

- если $m = 0$, то припишем 12 или 21;
- если $m = 1$, то припишем 11;
- если $m = 2$, то припишем 22;

Таким образом, из каждого 98-значного числа, кратного 3, можно получить два кратных трем 100-значных числа. Каждое не кратное трем 98-значное число порождает только одно кратное трем 100-значное число. Всего 98-значных чисел 2^{98}. Пусть среди них A_{98} чисел кратно трем. (Далее символом A_n будем обозначать количество n-значных чисел, кратных 3.) Тогда количество кратных трем 100-значных чисел может быть найдено по формуле $A_{100} = 2A_{98} + (2^{98} - A_{98}) = 2^{98} + A_{98}$.

Верны, таким образом, следующие соотношения:

$$A_{100} = 2^{98} + A_{98}$$
$$A_{98} = 2^{96} + A_{96}$$
$$\dots$$
$$A_6 = 2^4 + A_4$$
$$A_4 = 2^2 + A_2.$$

Сложив эти равенства (величины $A_4, \dots, A_{98}$ при этом сокращаются), получим $A_{100} = A_2 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{98}$. Остается просуммировать геометрическую прогрессию и заметить, что $A_2 = 2$. Тогда $A_{100} = 2 + \frac{4^{50}-4}{3} = \frac{4^{50}+2}{3}$.

Ответ: $\frac{4^{50}+2}{3}$.

Задача 8 (9, 10 классы)

На декартовой плоскости рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Укажите хотя бы одно значение R, при котором на такой окружности лежат ровно 32 целочисленные точки (точку называют целочисленной, если ее абсцисса и ордината – целые числа).

Указание. Натуральное число x представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда все простые числа (кроме 2), входящие в разложение числа x в нечетной степени, имеют вид $4k + 1$ для некоторых целых k. В частности, в виде суммы двух квадратов представимо любое простое число, дающее остаток 1 при делении на 4. Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то это же верно и для их произведения.

Решение

Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то, как отмечено в указании, их произведение тоже представимо в таком виде. Более того, произведение, как правило, представимо в виде суммы двух квадратов большим количеством способов, чем каждый из сомножителей. Например, число 5 в виде суммы двух квадратов неотрицательных чисел представимо единственным с точностью до перестановки слагаемых способом, а именно: $5 = 2^2 + 1^2$; число 13 тоже только одним способом: $13 = 2^2 + 3^2$, а вот их произведение уже двумя[1]: $65 = 5 \cdot 13 = 4^2 + 7^2 = 1^2 + 8^2$. Добавив еще один простой множитель, дающий остаток 1 при делении на 4, получим 4 способа:

$$1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2.$$

Значит, на окружности радиуса $R = \sqrt{1105}$ в первой четверти лежат 8 целочисленных точек: $(4, 33)$, $(33, 4)$, $(9, 32)$, $(32, 9)$, $(12, 31)$, $(31, 12)$, $(23, 24)$, $(24, 23)$. Следовательно, всего на этой окружности лежат 32 целочисленные точки.

Ответ: Например, $\sqrt{1105}$.

Комментарий

[1]Эффект увеличения числа способов принято объяснять, используя комплексные числа. Заметим, что. $5 = (2 + i)(2 - i) = 2^2 + 1^2$. Число 5 равно сумме двух квадратов, так как оно представимо в виде произведения двух сопряженных комплексных (гауссовых) чисел. Аналогично, $13 = (2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2$. В то же время число $65 = 5 \cdot 13$ в виде произведения двух комплексно-сопряженных множителей представимо двумя способами:

$$5 \cdot 13 = (2 + 3i)(2 + i) \cdot (2 - 3i)(2 - i) = (1 + 8i) \cdot (1 - 8i) = 1^2 + 8^2$$

или

$$5 \cdot 13 = (2 - 3i)(2 + i) \cdot (2 + 3i)(2 - i) = (7 + 4i) \cdot (7 - 4i) = 7^2 + 4^2$$

Задача 9 (10 класс)

Решите уравнение

$$\sin^3 x + 6\cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Решение

Преобразуем уравнение

$$sin^3x + sinxcosx(sinx + cosx) + 6cos^3x = 0;$$
$$sin^3x + sin^2xcosx + sinxcos^2x + 6cos^3x = 0.$$

Если $cosx = 0$, то подставляя в уравнение, получим $sinx = 0$, чего быть не может. Разделим на cos^3x:

$$tg^3x + tg^2x + tgx + 6 = 0.$$

Сделаем замену $y = tgx$:

$$y^3 + y^2 + y + 6 = 0;$$
$$(y + 2)(y^2 - y + 3) = 0;$$
$$y = -2, tgx = -2, x = -arctg2 + \pi n, n\epsilon Z.$$

Ответ: $x = -arctg2 + \pi n, n\epsilon Z.$

Задача 10 (10 класс)

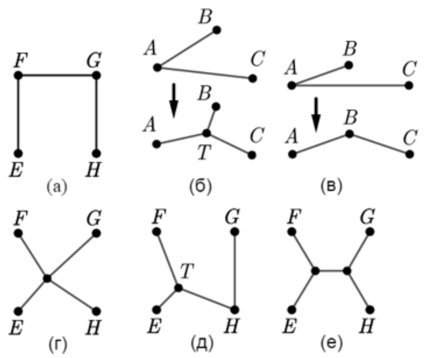
В вершинах квадрата со стороной 4 расположены четыре города. Эти города надо соединить дорогами так, чтобы из любого города можно было по ним добраться в любой. Предложите хоть один вариант таких дорог, общей длиной *менее* 11.

Указание. При решении задачи может оказаться полезным следующее утверждение (которое допустимо использовать без доказательства). *Пусть внутренние углы треугольника ABC меньше 120^0. Сумма расстояний $AT + BT + CT$ от точки T до вершин треугольника минимальна, если из точки T стороны треугольника видны под углом 120^0 (T – точка Торичелли треугольника). Если же один из углов треугольника больше или равен 120^0, то точкой минимума суммы расстояний будет вершина этого угла.*

Решение

Предположим, что у нашей системы дорог перекрестков нет, то есть имеется одна дорога, соединяющая последовательно вершины квадрата E, F, G и H. Тогда ее длина будет не меньше трех сторон квадрата (буквы «П» на рис. (а)), то есть не меньше 12 (дорога, соединяющая соседние вершины квадрата, не меньше его стороны).

Значит, искомая (а в идеале кратчайшая) система дорог должна иметь перекрестки (например, как на рис. (д)). Чтобы понять каким образом можно эффективно общую длину дорог уменьшать, полезно прежде обратить внимание на некоторые свойства, которыми *кратчайшая система дорог* обязана обладать:



i. <u>Кратчайшая система дорог состоит из отрезков, соединяющих перекрестки и вершины квадрата.</u> Это очевидно, поскольку кратчайшим путем из одной точки в другую является отрезок прямой. Отметим без доказательства, хотя и это почти очевидно, что для любой системы городов кратчайшая система дорог их соединяющая – это связный граф без замкнутых путей, ребрами которого служат отрезки.

ii. <u>Каждый перекресток должен быть соединен минимум с тремя вершинами графа (вершинами квадрата или перекрестками).</u> (Если он соединен только с двумя, то смысла в нем немного: его можно удалить, а эти две вершины соединить напрямую; получится короче.)

iii. <u>Угол между любыми двумя дорогами, выходящими из одного перекрестка (или из одной вершины квадрата) не может быть меньше 120^0.</u> Действительно, пусть из точки A выходят дороги AB и AC, и угол BAC меньше 120^0. Тогда дороги AB и AC можно заменить дорогами с меньшей суммарной длиной. Если в треугольнике ABC все внутренние углы меньше 120^0, тот дороги AB и AC заменим на дороги TA, TB и TC, где T – точка Торичелли треугольника ABC (рис. (б)). Если же, например, угол B больше 120^0, то AB и AC заменим на AB и BC (рис. (в)).

iv. <u>Из одного перекрестка выходят ровно три дороги под углами 120^0</u> (иначе длина дорог может быть уменьшена). Это немедленно следует из свойств (ii) и (iii).

Предположим, что система дорог обладает одним перекрестком. Если он соединен со всеми вершинами рис. (г), то длина дорог не меньше суммы диагоналей, которая равна $8\sqrt{2} > 11$. Если же он соединен только с тремя вершинами (рис. (д)), то T – точка Торичелли треугольника EFH, вершина G соединена с F. В этом случае длина дорог приблизительно равна $11{,}7$. Более того, нарушено свойство (iii), так как $\angle THG < 120^0$, а значит длину дорог можно уменьшить, добавив еще один перекресток (как в случае на рис. (б)).

Пусть перекрестков два. Из соображений симметрии расположим их на параллельной двум сторонам оси симметрии квадрата (рис. (е)) так, чтобы из каждого перекрестка дороги выходили под углами 120^0 (свойство (iv)). В этом случае суммарная длина дорог равна $4 \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right) < 10{,}92$.

Ответ: Например, система дорог с двумя перекрестками на параллельной двум сторонам оси симметрии квадрата (рис. (е)). Из каждого перекрестка дороги выходят под углами 120^0. Их суммарная длина равна $4 \cdot (\sqrt{3}+1) < 11$.

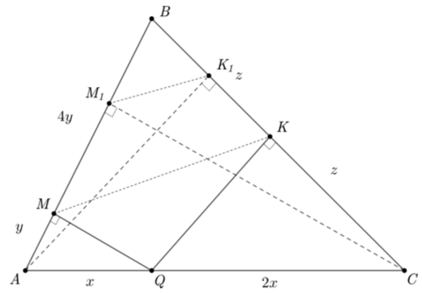
Комментарий

Система дорог на рис. (е) называемая *сетью Штейнера* данных четырех точек, вершин квадрата E, F, G и H. Без доказательства отметим, что эта система имеет минимальную длину из всех возможных.

Задача 11 (10 класс)

В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка Q так, что $AQ:QC = 1:2$. Из точки Q опущены перпендикуляры QM и QK на стороны AB и BC соответственно. При этом $BM:MA = 4:1, BK = KC$. Найдите $MK:AC$.

Решение



Проведем высоты AK_1 и CM_1. Идея решения в следующем: покажем, что треугольники M_1BK_1, MBK и ABC друг другу подобны; отсюда будет легко найти требуемое отношение.

Обозначим длины:

$$AQ = x,\ QC = 2x,\ CK = z,\ KB = z, BM = 4y, MA = y.$$

Из подобия треугольников AK_1C и QKC находим

$$KK_1 = \text{КС} \cdot AQ/QC = z/2.$$

Аналогично, так как $\Delta AQM \sim \Delta ACM_1$, то $MM_1 = QC \cdot AM/AQ = 2y$. Таким образом, так как $BK_1 = KK_1$ и $MM_1 = M_1B$, то $\Delta M_1BK_1 \sim \Delta MBK$ с коэффициентом подобия 2 (их общий угол лежит между пропорциональными сторонами). Хорошо известно, что треугольник, образованный двумя основаниями высот и вершиной, подобен исходному, а именно: $\Delta M_1BK_1 \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $\cos\angle B$. Значит, $M_1K_1 : AC = \cos\angle B$ и тогда

$$MK : AC = 2\cos\angle B. \qquad (1)$$

Остается вычислить $\cos\angle B$. Площади подобных треугольников ΔM_1BK_1 и ΔABC относятся как квадрат коэффициента подобия:

$$\frac{BM_1 \cdot BK_1}{BA \cdot BC} = \frac{2y \cdot \frac{z}{2}}{5y \cdot 2z} = \cos^2\angle B.$$

Отсюда $\cos\angle B = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Подставив найденное значение в (1), получаем ответ.

Ответ: $MK : AC = \frac{2}{\sqrt{10}}$.

Задача 12 (11 класс)

Решите неравенство

$$2^{\log_2^2 x} - 12 \cdot x^{\log_{0,5} x} < 3 - \log_{3-x}(x^2 - 6x + 9).$$

Решение

$$2^{\log_2^2 x} - 12 \cdot x^{\log_{0,5} x} < 3 - \log_{3-x}(x^2 - 6x + 9) \Leftrightarrow$$
$$x^{\log_2 x} - 12 \cdot x^{-\log_2 x} < 3 - \log_{3-x}(3 - x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_2 x} - 12 \cdot x^{-\log_2 x} < 1 & (1) \\ x < 3, \ \ x \neq 2. & (2) \end{cases}$$

Решим неравенство (1) системы.

Обозначим $x^{\log_2 x} = y, y > 0$. Тогда (1) $\Leftrightarrow y - \frac{12}{y} < 1 \Leftrightarrow \frac{(y+3)(y-4)}{y} < 0$. Так как $y > 0$, то $y \in (0, 4)$.

Отсюда $x^{\log_2 x} < 4 \Leftrightarrow \log_2^2 x < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < \log_2 x < \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{2}} < x < 2^{\sqrt{2}}$ – это ответ в неравенстве (1).

Далее учтем ограничения (2). Для этого сравним числа $2^{\sqrt{2}}$ и 3. Заметим, что $2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$ и $2^{1,5} < 3$, так как $8 = (2^{1,5})^2 < 3^2 = 9$. Поэтому $2^{\sqrt{2}} < 3$. Запишем ответ с учетом (2).

Ответ: $x \in \left(2^{-\sqrt{2}}, 2\right) \cup \left(2, 2^{\sqrt{2}}\right)$.

Задача 13 (11 класс)

Решите уравнение $\sqrt{\frac{2t}{1+t^2}} + \sqrt[3]{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 1$.

Решение

Сделаем замену:

$$t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \alpha \in (-\pi, \pi). \qquad (1)$$

Тогда

$$\frac{2t}{1+t^2} = \sin\alpha,\ \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\alpha,$$

и исходное уравнение примет вид:

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt[3]{\cos\alpha} = 1. \qquad (2)$$

Если $\cos\alpha < 0$, то левая часть (2) строго меньше 1, и корней у (2) нет. В случае же, когда $\cos\alpha \geq 0$ и $\sin\alpha \geq 0$, имеем очевидное неравенство:

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt[3]{\cos\alpha} \geq \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Причем равенство достигается, только когда или $\cos\alpha = 1$, или $\sin\alpha = 1$. Значит либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = \pi/2$. Подставив найденные значения α в (1), найдем искомое t.

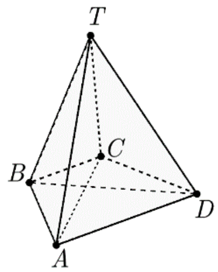
Ответ: $t \in \{0, 1\}$.

Задача 14 (11 класс)

Основанием пирамиды $TABCD$ является трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Расстояния от точек A и B до плоскости TCD равны r_1 и r_2 соответственно. Площадь треугольника TCD равна S. Найдите объем пирамиды $TABCD$.

Решение

Объем пирамиды $TABCD$ равен сумме объемов пирамид $TBCD$ и $TABD$: $V_{TABCD} = V_{TBCD} + V_{TABD}$. Причем $V_{TABD} = V_{TACD}$, так как у пирамид $TABD$ и $TACD$ общая высота (из вершины T), а также равны площади оснований: $S_{ABD} = S_{ACD}$ (у этих треугольников общее основание BC и равные по длине высоты, проведенные из вершин B и C, поскольку $ABCD$ – трапеция по условию). Итак,



$$V_{TABCD} = V_{TBCD} + V_{TACD} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r_2 + \frac{1}{3} \cdot S \cdot r_1.$$

Ответ: $\frac{S(r_1+r_2)}{3}$.

Задача 15 (11 класс)

Дан треугольник ABC. На стороне AC выбирают точку Q таким образом, чтобы длина отрезка MK, где M и K – основания перпендикуляров, опущенных из точки Q на стороны AB и AC соответственно, оказалась минимальной. При этом $QM = 1$, $QK = \sqrt{2}$, $\angle B = 45^0$. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение

Длины перпендикуляров, опущенных из точки Q основания AC, обозначим как d_1 и d_2; пусть $\angle B = \beta$. Четырехугольник $MBKQ$ вписан в окружность, и BQ ее диаметр. По формуле для радиуса описанной около треугольника MBK окружности имеем:

$$BQ = MK/\sin\beta \Rightarrow MK = BQ \cdot \sin\beta. \qquad (1)$$

Поскольку величина угла β фиксирована, длина отрезка MK тем меньше, чем меньше длина BQ. Значит, точка Q – это основание перпендикуляра, опущенного из точки B на AC, и

BQ – высота (основание перпендикуляра Q лежит именно на стороне AC, а не на ее продолжении, так как углы A и C острые; если бы, скажем, угол A был тупым, то точка M оказалась бы на продолжении стороны AB, а не на ней самой); положим $BQ = h$. Найдем площадь ΔABQ, считая пока h известной величиной.

Имеем $AQ = h/\sin\angle A = h/\sqrt{1 - d_1^2/h^2}$.

Тогда $S_{ABQ} = \frac{h^4}{2\sqrt{h^2-d_1^2}}$. Аналогично, $S_{BQC} = \frac{h^4}{2\sqrt{h^2-d_2^2}}$. Искомая площадь равна их сумме:

$$S_{ABC} = S_{ABQ} + S_{BQC} = \frac{h^4}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{h^2-d_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{h^2-d_2^2}}\right). \qquad (2)$$

Остается найти h. Так как $h = BQ$, то из (1) следует, что $h = MK/\sin\beta$. Найдем MK из ΔMQK (в нем $\angle MQK = 180^0 - \beta$) по теореме косинусов:

$$MK^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\beta.$$

Итак,

$$h = MK/\sin\beta = \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2\cos\beta}}{\sin\beta}.$$

Чтобы воспользоваться (2), прежде для удобства вычислим:

$$h^2 - d_1^2 = \frac{d_1^2+d_2^2+2d_1 d_2\cos\beta - d_1^2\sin^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{(d_1\cos\beta + d_2)^2}{\sin^2\beta}.$$

Аналогично, $h^2 - d_2^2 = \frac{(d_2\cos\beta+d_1)^2}{\sin^2\beta}$. Подставив полученные выражения в (2), находим:

$$S_{ABC} = \frac{\left(d_1^2+d_2^2+2d_1 d_2\cos\beta\right)^2}{2(d_1\cos\beta+d_2)(d_2\cos\beta+d_1)\sin\beta}.$$

Используя теперь числовые данные задачи, получаем ответ.

Ответ: $S_{ABC} = \frac{25}{6}$.

Задача 16 (11 класс)

Найдите все неотрицательные целые числа a и b, удовлетворяющие равенству $a^2 + b^2 = 841 \cdot (ab + 1)$.

Решение

Пусть пара чисел (a, b) удовлетворяет уравнению задачи:

$$a^2 + b^2 = k^2(ab + 1), k = 29. \qquad (1)$$

Предположим, что одно из чисел, например a, равно нулю. Тогда, очевидно, $b = k$. Поэтому далее будем рассматривать такие решения (a, b) уравнения (1), для которых

$$a \neq 0, b \neq 0. \qquad (2)$$

Более того, будем предполагать, что

$$a \leq b. \qquad (3)$$

Итак, пусть пара (a_0, b_0) удовлетворяет (1), а также усл. (2), (3). Из (1) находим, что $b_0^2 - k^2 a_0 b_0 + a_0^2 - k^2 = 0$.

Это равенство можно трактовать как квадратное уравнение относительно неизвестной b_0. По теореме Виета, помимо, собственно, b_0, это уравнение еще имеет корень b_0' такой, что

$$b_0 + b_0' = k^2 a_0, \qquad (4)$$

$$b_0 b_0' = a_0^2 - k^2. \qquad (5)$$

Утверждение. Этот новый корень b_0' удовлетворяет условиям: $b_0' \geq 0$, $b_0' \in \mathbb{Z}$ и $b_0' < a_0$.

Доказательство. Числа a_0 и b_0' удовлетворяют (1), поэтому $b_0' \geq 0$ (иначе правая часть (1) была бы отрицательной, так как, по условию задачи и в силу (2), $a_0 > 0$). Из (4) следует, что неотрицательное b_0' является целым, а из (5) – что $b_0' = \frac{a_0^2 - k^2}{b_0}$. Установим, что $b_0' < a_0$. Действительно,

$$b_0' < a_0 \Leftrightarrow \frac{a_0^2 - k^2}{b_0} < a_0 \Leftrightarrow a_0^2 - k^2 < a_0 b_0 \Leftarrow a_0^2 \leq a_0 b_0.$$

Последнее верно в силу (3).■

Таким образом, пара (a_0, b_0), удовлетворяющая уравнению (1) и ограничениям (2), (3), порождает новую пару (см. (4)) вида $(b_0', a_0) = (k^2a_0 - b_0,\ a_0)$, которая также удовлетворяет (1), (2), (3) (если, конечно, $a_0 \neq k$; так как, согласно (5), b_0' еще может быть найден по формуле $b_0' = \frac{a_0^2 - k^2}{b_0}$, так что, если $a_0 = k$, то (3) не будет выполнено). Будем эту новую пару обозначать как (a_1, b_1). Затем по тем же формулам можно из пары (a_1, b_1) получить еще решение (a_2, b_2) и т.д. Символически полученный результат представим следующим образом:

$$(a_0, b_0) \to (a_1, b_1) = (k^2a_0 - b_0,\quad a_0) \to (a_2, b_2) \to \cdots \qquad (6)$$

Здесь $a_m = k^2a_{m-1} - b_{m-1}, b_m = a_{m-1}$, при этом

$$a_m > a_{m-1}(\text{см. утверждение}) \qquad (7)$$

Сразу же отметим и формулы обратного преобразования

$$a_{m-1} = b_m, b_{m-1} = k^2b_m - a_m, \qquad (7')$$

с помощью которых можно цепочку (6) продолжить влево. С помощью правила (7), из одного решения (a_0, b_0), удовлетворяющего (1), (2), (3), мы можем получить лишь конечное число новых решений уравнения (1), так как, согласно доказанному утверждению, $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots \geq 0$. Значит, на каком-то шаге обязательно получится $a_n = 0$ (тогда, как было показано выше, $b_n = k$). Чтобы на n-м шаге получить 0, на предыдущем шаге должно было быть $a_{n-1} = k$ (подставив $a = a_{n-1} = k$ в (1), найдем $b = b_{n-1} = k^3$). Таким образом, окончание цепочки (6) выглядит так:

$$\ldots \to (a_{n-1}, b_{n-1}) = (k, k^3) \to (a_n, b_n) = (0, k). \qquad (8)$$

(Цепочку (8) вправо продолжать смысла нет, так как далее $(0, k) \to (-k, 0) \to (0, k) \to \cdots$.) А вот что предшествует паре $(a_{n-1}, b_{n-1}) = (k, k^3)$? Согласно $(7')$, на предыдущем шаге

$a_{n-2} = k^3, b_{n-2} = k^5 - k$ – и это тоже решение уравнения (1)! Можно продолжить, получая новые решения: $a_{n-2} = k^5 - k, b_{n-2} = k^7 - 2k^3$ и так далее. Значит, всего решений у уравнения (1) бесконечно много, так как цепочку (8) можно продолжить влево сколь угодно далеко.

Поясним почему (8) содержит *все решения* (1), удовлетворяющие условию (3). Пусть (a^*, b^*) – какое-то (удовлетворяющее (3)) решение уравнения (1). Было показано, что с помощью формул (7) из решения (a^*, b^*) можно получить цепочку новых решений (см. (6)), которая непременно закончится решением $(0, k)$. Но это и означает, что (a^*, b^*) содержится в (8), ведь, приняв теперь решение $(0, k)$ за отправную точку, мы с помощью обратных преобразований $(7')$ вернемся к (a^*, b^*) (а цепочка (8) именно так и устроена: начав с $(0, k)$, мы с помощью $(7')$ получаем ее всю).

Чтобы записать ответ несколько поменяем нумерацию: положим $(a_0, b_0) = (0, k)$ и двинемся с помощью $(7')$ по цепочке (8) влево (у нас будет $(a_1, b_1) = (k, k^3), (a_2, b_2) = (k^3, k^5 - k)$ и т.д.).

Ответ: Решениями (a, b) (при условии $a \leq b$) служат те и только те пары чисел (a_n, b_n), которые каждом $n \in \mathbb{N}$ вычисляются по формулам: $a_n = b_{n-1}, b_n = k^2 b_{n-1} - a_{n-1}$, $a_0 = 0, b_0 = k$; здесь $k = 29$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проверка работ проводилась централизовано по единым критериям. Всего дипломами I, II, III степени награждены 102 участника. Задания олимпиады были подготовлены для каждой возрастной категории (9, 10 и 11 классы) в нескольких равноценных вариантах. В сборнике приведены условия и решения одной из задач каждого типа.

С задачами прошедших олимпиад по математике и их решениями можно ознакомиться:

- на сайте v-olymp.ru;
- на сайте Академии ФСБ России www.academy.fsb.ru (раздел для абитуриентов);
- в научно-популярном физико-математическом журнале для школьников и студентов «Квант» (раздел «Приложения. Математика»), www.kvant.info;
- также можно получить доступ к системе дистанционного обучения для подготовки к олимпиаде на сайте: http://www.v-olymp.ru.